# Bab 4

# Limit Fungsi

Coba kalian perhatikan gambar sawah terasering dan atap rumah di atas. Bagaimana kalian menentukan luas atap dan sawah tersebut? Kalian dapat menentukan luas atap dan sawah terasering tersebut dengan menggunakan fungsi pendekatan. Dalam matematika fungsi pendekatan dapat dipelajari pada limit fungsi. Dengan limit fungsi kalian dapat menentukan luas suatu daerah yang bentuknya tidak tentu.

Setelah mempelajari materi ini kalian diharapkan dapat; menghitung limit fungsi aljabar di satu titik serta menghitung limit fungsi aljabar sederhana di satu titik, serta menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar.

**Peta konsep** berikut memudahkan kalian dalam mempelajari seluruh materi pada bab ini.


Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. **Limit**
2. **Fungsi Aljabar**
3. **Limit di Satu Titik**
4. **Limit di Tak Hingga**
5. **Bentuk Tak Tentu**
6. **Teorema Limit**
7. **Turunan**

Materi mengenai limit fungsi merupakan bagian dari pengantar kalkulus, yaitu mengenai hitung diferensial dan hitung integral. Teori limit ini menjadi dasar-dasar kalkulus di mana hal tersebut memakai konsep dengan definisi yang dirumuskan oleh Augustin – Louis Cauchy. Sebelum mempelajari materi ini sebaiknya kalian mempelajari dan mengingat kembali materi aljabar tentang pemfaktoran.

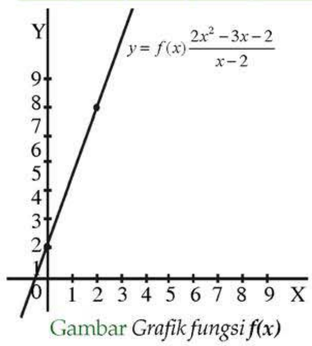
## A. Limit Fungsi di Satu Titik

Pengertian limit fungsi merupakan pengertian dasar hitung diferensial dan hitung integral. Perhatikan contoh di bawah ini untuk dapat memahami pengertian limit.

Fungsi $f$ didefinisikan sebagai $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$. Jika variabel $x$ diganti dengan 2 maka $f(2) = \frac{0}{0}$. Akan tetapi, adakah suatu bilangan yang akan didekati oleh $f(x)$ jika nilai $x$ mendekati 2? Perhatikan Tabel 4.1 dan Gambar 4.1.

*Tabel Nilai fungsi* $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ *untuk x mendekati 2*

| $x$ | 0 | 1,5 | 1,9 | 1,999 | $\rightarrow$ 2,000 $\leftarrow$ | 2,001 | 2,01 | 2,1 | 2,5 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 3 | 4 | 4,998 | $\rightarrow$ ? $\leftarrow$ | 5,002 | 5,02 | 5,2 | 6 | 7 | 9 |




Gambar *Grafik fungsi* $f(x)$ $= \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$

Dari tabel dan gambar, kita dapat memperoleh kesimpulan $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ mendekati 5 jika $x$ mendekati 2, baik didekati dari sebelah kiri (disebut limit kiri) maupun didekati dari sebelah kanan (disebut limit kanan). Sehingga dapat dikatakan bahwa $f(x)$ mendekati 5 untuk $x$ mendekati 2, dan ditulis:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5.$$

**Pengertian Limit Kiri dan Limit Kanan**

Limit $f(x) = L$ mengandung arti bahwa $x$ mendekati dari dua pihak, yaitu:

1. $x$ mendekati $a$ dari pihak kurang dari $a$, yang disebut mendekati $a$ dari kiri dan ditulis $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.
2. $x$ mendekati $a$ dari pihak lebih dari $a$, yang disebut mendekati $a$ dari kanan dan ditulis $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

Sehingga limit fungsi dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

atau

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) \text{ (limit kiri)} = \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ (limit kanan)} = L$$

## B. Limit Fungsi Aljabar di Satu Titik

### 1. Limit Fungsi $f : x \to f(x)$ untuk $x \to a$

Kita dapat menyelesaikan limit fungsi $f(x)$ untuk $x \to a$ dengan menggunakan cara substitusi, yaitu dengan mensubstitusikan nilai $x = a$ ke dalam $f(x)$. Apabila diperoleh:

$f(a) = h$ (tentu), berarti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = h$

$f(a) = \dfrac{h}{0} = \infty$ (tentu), berarti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

$f(a) = \dfrac{0}{h} = 0$ (tentu), berarti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

$f(a) = \dfrac{0}{0} = \dfrac{\infty}{\infty} = \infty - \infty$ (disebut bentuk tak tentu)

Limit bentuk tak tentu dapat diselesaikan dengan cara berikut.

a. Bentuk $f(x)$ difaktorkan sehingga $f(a) \neq \frac{0}{0}$, kemudian nilai $x = a$ disubstitusikan lagi.

b. Bentuk $f(x)$ dikalikan dengan sekawan pembilang atau penyebut sehingga $f(a) \neq \frac{0}{0}$, kemudian nilai $x = a$ disubstitusikan lagi.

**Contoh 4.1**

Selesaikanlah bentuk limit di bawah ini.

a. $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 3)$

b. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2}{2x - 4}$

c. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

d. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

f. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{(x^2 + 2x - 24)(x + 2)}{x^2 + 8x + 12}$

**Jawab:**

a. $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 3) = 2 \times 3 + 3 = 9$

b. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2}{2x - 4} = \frac{3 \times 2^2 - 2}{2 \times 2 - 4} = \frac{10}{0} = \infty$

c. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{1 - 1}{1 + 2} = \frac{0}{3} = 0$

d. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2^2 - 4}{2^2 - 5 \times 2 + 6} = \frac{0}{0}$ (disebut tak tentu)

Cara penyelesaiannya adalah sebagai berikut.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3}$$

$$= \frac{2+2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

e. $$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x-x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{6}}\right)}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= 0 - 0 = 0$$

f. $$\lim_{x\to -2} \frac{(x^2+2x-24)(x+2)}{x^2+8x+12}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+6)(x-4)(x+2)}{(x+6)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} x-4 = -6$$

**Contoh 4.2**

Selesaikan bentuk limit di bawah ini.

a. $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$  b. $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

**Jawab:**

a. $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{0}{0}$ (tak tentu)

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}} \times \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \quad \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{(x^2-4)}$$

$$= \quad \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \quad \lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = -\frac{0}{4} = 0$$

b. $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \quad = \frac{0}{0}$ (tak tentu)

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \quad \lim_{x \to 9} \left(\sqrt{x}+3\right)$$

$$= \quad 3 + 3 = 6$$

## Dimensi Matematika

**Meningkatkan Sikap Kritis Siswa**

Menurut kalian apakah arti limit secara bahasa? jelaskan dengan kata-kata kalian sendiri.

## Latihan 4.1

**Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.**

Hitunglah nilai dari limit fungsi berikut.

1. a. $\lim_{x \to 1} (3x-1)$
   b. $\lim_{x \to 3} \sqrt{16+x^2}$
   c. $\lim_{x \to 2} \sqrt{3x-2}$
   d. $\lim_{x \to -1} (x^2-2x+1)$
   e. $\lim_{x \to 3} \sqrt{7+2x^2}$
2. a. $\lim_{x \to 2} \frac{2x-1}{3x-4}$
   b. $\lim_{x \to 2} \frac{5x+1}{x-2}$
   c. $\lim_{x \to -5} \frac{5+x}{1-3x}$
   d. $\lim_{x \to -2} \frac{3x-1}{1-2x}$
   e. $\lim_{x \to 0} \frac{1+6x}{5x-2}$

3. a. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+5}{x^2-9}$

   b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x+3}$

   c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-x}{x^2+2x}$

   d. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4-16}{x^2-4}$

   e. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$

4. a. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}$

   b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2+6x-7)}{x-1}$

   c. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x^3-7x-6)}{(x+2)}$

   d. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2+4x+3}{x^3+3}$

   e. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

5. a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3-\sqrt{2x+5}}{x^2+6x-16}$

   b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{x}$

   c. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

   d. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

   e. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x^3-x}$

6. a. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

   b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

   c. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

   d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}-2}{x-2}$

   e. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x}-a}{x-a}$

## 2. Limit Fungsi $f : x \to f(x)$ untuk $x \to \infty$

Bentuk limit fungsi aljabar dengan variabel mendekati tak hingga yang sering dijumpai adalah $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dan $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - g(x)$. Dengan substitusi kedua bentuk limit itu akan diperoleh bentuk tak tentu, sehingga dalam menyelesaikan limit fungsi aljabar yang variabelnya mendekati tak hingga (tak tentu) diubah menjadi bentuk tentu dapat kita gunakan cara berikut.

### *a. Membagi Pangkat Tertinggi*

Bentuk $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ diselesaikan dengan cara membagi pangkat tertinggi dari pembilang dan penyebut.

### *b. Mengalikan dengan Faktor Sekawan*

Bentuk $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$ diselesaikan dengan cara mengalikan sekawannya, yaitu $\frac{f(x) + g(x)}{f(x) + g(x)}$ sehingga bentuk limitnya berubah menjadi

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to \infty} \frac{f^2(x) - g^2(x)}{f(x) + g(x)}.$$

Selanjutnya dilakukan dengan cara yang pertama lagi.

**Contoh 4.3**

Hitunglah nilai limit berikut.

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x - 6}{x + 4}$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{3x^4 - 2x^2 + 3x + 1}$

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x + 2}{\sqrt{x^2 - 3} + \sqrt{4x^2 + 7x}}$

**Dimensi Matematika**

**Mencari Informasi Lebih Lanjut**

Coba carilah materi ini di internet untuk membuktikan kebenaran kedua cara menghitung limit fungsi aljabar

**Jawab:**

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - x - 6}{x+4}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{2-0-0}{0+0} = \infty$$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{3x^4 - 2x^2 + 3x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4}}{3 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}}$

$$= \frac{0-0+0}{3-0-0+0} = \frac{0}{3} = 0$$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+2}{\sqrt{x^2-3} + \sqrt{4x^2+7x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x+2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x+2}{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}} + x\sqrt{4+\frac{7}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}} + \sqrt{4+\frac{7}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x + \frac{2}{\infty}}{\sqrt{1 - \frac{3}{\infty}} + \sqrt{4 + \frac{7}{\infty}}}$$

$$= \frac{5+0}{\sqrt{1-0} + \sqrt{4+0}} = \frac{5}{1+2} = 1\frac{2}{3}$$

**Contoh 4.4**

Hitunglah nilai limit berikut.

a. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}\right)$

b. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}\right)$

**Jawab:**

a. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}\right) \times \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2 + 2x\right) - \left(x^2 - 2x\right)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x - 1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = 2$$

## Dimensi Matematika

**Meningkatkan Sikap Kritis Siswa**

Bagaimana menyelesaikan bentuk limit tak hingga dari pecahan yang pembilang dan penyebutnya dalam bentuk akar? Kemukakan pendapat kalian!

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)-(x+2)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{0}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}} = \frac{0}{2} = 0$$

## Latihan 4.2

**Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.**

1. Hitunglah nilai dari limit fungsi berikut.

   a. $\lim_{x\to 1}(3x-1)$

   b. $\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{3x-4}$

   c. $\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{x^2-9}$

   d. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+3}$

   e. $\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{x^2-2x+1}$

2. Hitung nilai limit fungsi berikut.

   a. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x-1}\right)$

   b. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+2}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+3x}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)$

f. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x^2+2x-3}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{x^2+x-3}\right)$

h. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{2x^2-x+2}\right)$

3. Tentukan nilai dari limit berikut.

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+2}{5x^3+2x-1}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x+1}{x^3-2x+1}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-1}{4x^2-2x+2}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{2+4+6+\ldots+2n}$

f. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x-1}+1}{2^{x+2}-1}$

## C. Teorema Limit

Perhitungan limit fungsi dan caranya telah kita pelajari pada materi sebelumnya. Dalam menghitung nilai limit, kita menggunakan beberapa sifat yang bisa kita peroleh dari teorema berikut.

**Teorema 1**

Jika $m$ dan $b$ adalah sembarang konstanta maka $\lim\limits_{x \to a} (mx + b) = ma + b$.

**Contoh 4.5**

$\lim\limits_{x \to 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 10$

**Teorema 2**

Jika $c$ adalah konstanta, maka untuk setiap sembarang bilangan $a$ berlaku: $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

**Contoh 4.6**

$\lim\limits_{x \to 2} 5 = 5$

**Teorema 3**

Jika $f(x) = x$, maka $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

**Contoh 4.7**

$\lim\limits_{x \to 7} x = 7$

**Teorema 4**

Jika $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ maka:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$.

**Contoh 4.8**

a. $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 7) = \lim\limits_{x \to 2} 2x + \lim\limits_{x \to 2} 7 = 4 + 7 = 11$

b. $\lim\limits_{x \to 3} (10 - 3x) = \lim\limits_{x \to 3} 10 - \lim\limits_{x \to 3} 3x = 10 - 9 = 1$

**Teorema 5**

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M$ maka

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$$

**Contoh 4.9**

$$\lim_{x \to 2} x(2x+4)$$

$$= \lim_{x \to 2} x \lim_{x \to 2} (2x+4)$$

$$= (2)(8) = 16$$

**Teorema 6**

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $n$ sembarang bilangan positif maka:

$$\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$$

**Contoh 4.10**

$$\lim_{x \to 2} (x+1)^4 = (3)^4 = 81$$

**Teorema 7**

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M$, $M \neq 0$

maka $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

**Contoh 4.11**

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x}{3x-1} = \frac{\lim_{x \to 2} 2x}{\lim_{x \to 2} (3x-1)} = \frac{4}{5}$$

**Teorema 8**

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ maka $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$.

Dengan syarat,

a. $L > 0$ untuk $n$ bilangan bulat positif.

b. $L \leq 0$ untuk $n$ bilangan ganjil positif.

**Contoh 4.12**

$$\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{9x} = \lim_{x \to 3} \sqrt[3]{27} = 3$$

**Teorema 9**

Jika $a \in \boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{R}$ himpunan bilangan real, $a \neq 0$ maka $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$.

**Contoh 4.13**

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$$

**Teorema 10**

Jika $n \in$ bilangan bulat positif maka $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ .

**Contoh 4.14**

$$\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8} = 2$$

## Latihan 4.3

**Selesaikanlah soal-soal di bawah ini dengan menggunakan teorema limit.**

1. a. $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 5)$  d. $\lim\limits_{x \to a} (2x - 4)$

   b. $\lim\limits_{x \to 3} 7$  e. $\lim\limits_{x \to a} 7$

   c. $\lim\limits_{x \to 5} x$  f. $\lim\limits_{x \to a} x$

2. a. $\lim\limits_{x \to 2} 5x(2x + 2)$  d. $\lim\limits_{x \to a} (4x + 5)$

   b. $\lim\limits_{x \to 4} (x - 2)^3$  e. $\lim\limits_{x \to a} 3x(x + 2)$

   c. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{5x + 4}{2x - 5}$  f. $\lim\limits_{x \to a} 3x(x + 2)^2$

   g. $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 7)^{\frac{1}{2}}$  i. $\lim\limits_{x \to 2} (x + 3)(3x - 1)$

   h. $\lim\limits_{x \to 2} [(2 - 3x)(x^3 - 5)]^2$  j. $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x + 4)$

3. a. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{4x+1}$

   b. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x}$

   c. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{x}$

   d. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{x}$

   e. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{4x+2}$

   f. $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x}$

4. Hitunglah nilai dari limit fungsi berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

   b. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-4x+4}$

   c. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{5x-1}}{x-1}$

   d. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-3}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}$

5. Tentukan nilai limit fungsi berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2-5x+2}{x^2-2x+1}$

   b. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x^2-2}{x+1}$

   c. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-2x}$

   d. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+5}{x^2-9}$

   e. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^2-2x}$

6. Selesaikan bentuk limit di bawah ini.

   a. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x+1}$

   b. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x+2}$

   c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

   d. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x^2-9x+9}{x^2-3x}$

   e. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x^2-4}$

7. Tentukan nilai limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+7}\right)$

   b. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x+1)(x+3)}-x\right)$

   c. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{(2x-1)(x+2)}-(x\sqrt{2}+1\right)$

   d. $\lim\limits_{x\to\infty} \left((3x-2)-\sqrt{9x^2-2x+5}\right)$

8. Tentukan nilai limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-5x}-x-2$

   b. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)$

   c. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$

   d. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+5x+8}-\sqrt{2x^2+2x-1}\right)$

## D. Menghitung Limit Fungsi yang Mengarah ke Konsep Turunan

Turunan dari fungsi $f(x)$ adalah $f'(x)$. Fungsi $f'(x)$ dapat ditulis dalam bentuk limit fungsi, yaitu $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Apabila $f$ mempunyai turunan untuk tiap-tiap anggota dari domain $D$ dengan $D \in \boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{R}$ himpunan bilangan real untuk $a$, $b$, ... $\in D$ maka

$$f'(a) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a+k)-f(a)}{h}$$

$$f'(b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(b+k)-f(b)}{h}$$

Untuk tiap-tiap anggota dari $D$ diperoleh nilai $f'$ yang sesuai. Dengan demikian diperoleh fungsi baru $f'$ dengan domain $D$ yang disebut fungsi turunan dari $f$. Jadi, fungsi turunan $f$ ditentukan oleh rumus

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**Contoh 4.15**

Diketahui $f(x) = x^2 + 3$. Tentukan $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

**Jawab:**

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^2+3)-(x^2+3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2+3-x^2-3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\
&= 2x + 0 = 2x
\end{aligned}$$

**Contoh 4.16**

Apabila $f(x) = 2x^2 - 1$, tentukan $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

**Jawab:**

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2(x+h)^3-1)-(2x^3-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-1-2x^3+1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3-1-2x^3+1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6x^2h + 6xh^2 + 2h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(6x^2 + 6xh + 2h)}{h}$$

$$= 6x^2 + 6x\,(0) + 2(0) = 6x^2$$

**Contoh 4.17**

Apabila $f(x) = 3x^2$ maka tentukan $\lim\limits_{h \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$.

**Jawab:**

$$\lim_{h \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{h \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$$

$$= \lim_{h \to 5} \frac{3x^2 - 3(5)^2}{(x - 5)}$$

$$= \lim_{h \to 5} \frac{3(x^2 - 5^2)}{(x - 5)}$$

$$= \lim_{h \to 5} \frac{3(x + 5)(x - 5)}{(x - 5)}$$

$$= \lim_{h \to 5} 3(x + 5)$$

$$= 3(5 + 5) = 3 \cdot 10 = 30$$

**Dimensi Matematika**

**Meningkatkan Sikap Kritis Siswa**

Jelaskan peranan bentuk limit dalam ilmu sosial terutama dalam bidang ekonomi.

**Latihan 4.4**

**Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.**

1. Tentukan $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$, jika diketahui:

   a. $f(x) = -2x^2 + 5$

   b. $f(x) = 5x^3 - 4$

   c. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

   d. $f(x) = \sqrt{x}$

   e. $f(x) = x^2 + 2x - 8$

   f. $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 7}$

   g. $f(x) = 3x^2 + 6$

   h. $f(x) = x^2 + 5x + 6$

2. Tentukan $\lim\limits_{h \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, jika:

   a. $f(x) = 5x^2 - 1$ untuk $x \to 2$
   b. $f(x) = x^3 + x$ untuk $x \to 1$
   c. $f(x) = \frac{1}{x}$ untuk $x \to 3$
   d. $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ untuk $x$ ® $-2$
   e. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ untuk $x = 1$

3. Selesaikan soal berikut dengan menggunakan rumus $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

   jika diketahui:

   a. $f(x) = 2x + 3$
   b. $f(x) = 5x - 2$
   c. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$
   d. $f(x) = 5 - 2x - x^2$
   e. $f(x) = \frac{1}{x+2}$
   f. $f(x) = \frac{2}{x^2+5}$
   g. $f(x) = x^3 - 4$
   h. $f(x) = \frac{2}{x^2}$

## Rangkuman

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ (limit kiri) $= \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ (limit kanan) $= L$.
2. Nilai $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ setelah disubstitusikan diperoleh:

   a. $f(a) = h$, berarti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = h$
   b. $f(a) = \frac{h}{0} =$ ¥, berarti $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$ ¥

c. $f(a) = \frac{0}{h} = 0$, berarti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

d. $f(a) = \frac{0}{0}$, maka menyelesaikannya dengan:

1) difaktorkan sehingga $f(a) \neq \frac{0}{0}$ atau

2) dikalikan dengan sekawan pembilang atau penyebut sehingga $f(a) \neq \frac{0}{0}$.

3. Teorema Limit

a. $\lim\limits_{x \to a} (mx + b) = ma + b$

b. $\lim\limits_{x \to a} c = c$

c. $\lim\limits_{x \to a} x = a$

d. Jika $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ maka:

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x) = L \times M$

3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{f(g)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$.

e. Jika $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dan $n$ sembarang bilangan positif maka:

$\lim\limits_{x \to a} (f(x)^n) = L^n$

f. Jika $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ maka $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

g. Jika $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$ maka $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$

h. Jika $n \in$ bilangan bulat positif maka $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

**Tugas Perorangan**

**Tentukan nilai dari limit fungsi berikut.**

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$

2. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x^4 - 8x^3 + 2x^2}{2x^3 - x^2}$

3. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x^3 - 2x}{3x^2 + 4x}$

4 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

## Refleksi

Setelah kalian mempelajari bab ini, manfaat apakah yang kalian rasakan dari materi limit? Buatlah dalam bentuk laporan.

## Uji Kompetensi

**Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.**

1. Nilai $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ adalah ....

   a. 0
   b. 3
   c. $-\sqrt{3}$
   d. $3-\sqrt{3}$
   e. $3+\sqrt{3}$

2. Nilai $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x+3}$ adalah ....

   a. –9
   b. –5
   c. $-\dfrac{15}{4}$
   d. $-\dfrac{11}{4}$
   e. 0

3. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(a+x)^2 + (a-x)^2}{bx}$ adalah ....

a. $0$

b. $\frac{a}{b}$

c. $\frac{2a}{b}$

d. $\frac{4a}{b}$

e. $\infty$

4. Nilai $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{2-\sqrt{4x+6}}$ adalah ....

a. 4
b. 2
c. 0
d. –1
e. –2

5. Nilai $\lim\limits_{x \to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$ adalah ....

a. $7\sqrt{7}$

b. $3\sqrt{7}$

c. $2\sqrt{7}$

d. $\frac{1}{2\sqrt{7}}$

e. $\frac{1}{\sqrt{7}}$

6. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ adalah ....

a. 0
b. 1
c. 2
d. 3
e. 4

7. Nilai $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x-7} - \frac{2}{x-11}\right)$ adalah ....

a. $-\frac{1}{32}$
d. $\frac{1}{32}$
b. $-\frac{1}{24}$
e. $\frac{1}{24}$
c. 0

8. Nilai $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - x - 1}{1 - x^2}$ adalah ....

a. $-\frac{1}{2}$
d. $\frac{1}{4}$
b. $-\frac{1}{4}$
e. $\frac{1}{2}$
c. 0

9. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$ adalah ....

a. 0
d. $\frac{3}{2}$
b. $\frac{1}{3}$
e. 2
c. $\frac{2}{3}$

10. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{-2x}}$ adalah ....

a. 0
d. 4
b. 1
e. $\infty$
c. 2

11. Nilai $\lim_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ adalah ....

a. $\frac{1}{6}\sqrt{3}$
b. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
c. 1
d. $\sqrt{3}$
e. 3

12. Nilai $\lim_{x \to 3} \dfrac{x - \sqrt{2x+3}}{x^2 - 9}$ adalah ....

a. $\frac{1}{3}$
b. $\frac{1}{9}$
c. 0
d. 1
e. $\frac{1}{2}$

13. Nilai $\lim_{x \to a} \dfrac{x^2 + (3-a)\,x - 3a}{x - a}$ adalah ....

a. $a$
b. $a+1$
c. $a+2$
d. $a+3$
e. $a+4$

14. Nilai $\lim_{x \to 0} \dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ adalah ....

a. 0
b. $\sqrt{2}$
c. 3
d. 1
e. 2

15. Jika $f(x) = x^2$, maka $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ adalah ....

a. $\infty$
b. 0
c. 3
d. 6
e. 9

16. Nilai $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$ adalah ....

a. $-2$
b. $-1$
c. 0
d. 1
e. 2

17. Nilai $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x^2}$ adalah ....

a. $\frac{1}{2}$
b. 0
c. $\frac{1}{4}$
d. 1
e. 4

18. Nilai $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 8x - 3} - \sqrt{4x^2 + 9}}{x - 2}$ adalah ....

a. $-\frac{4}{5}$
b. 0
c. $\frac{2}{5}$
d. $\frac{5}{2}$
e. $\infty$

19. Nilai $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{2x - 2} - 2}{\sqrt{3x} - 3}$ adalah ....

a. 0
b. $\frac{2}{\sqrt{3}}$
c. $\frac{2}{3}$
d. 1
e. $\frac{3}{2}$

20. Nilai $\lim_{x \to 27} \dfrac{x - 27}{\sqrt[3]{x} - 3}$ adalah ....

a. 9
b. 18
c. 27
d. 36
e. 45