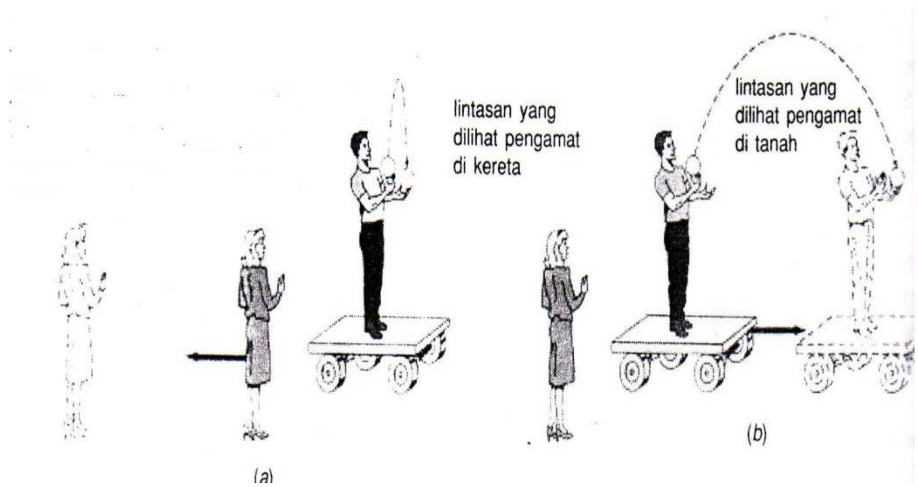
Bab 3

FUNGSI

Pernahkah anda memperhatikan gerakan bola yang dilempar ke atas oleh seseorang. Secara tidak langsung ternyata anda telah memperhatikan gerakan bola tersebut membentuk sebuah fungsi yang disebut dengan *Fungsi Parabola* (Gambar 6.1.1). Gambar *a* memperlihatkan sebuah lintasan Parabola jika pengamat berada pada sebuah kereta yang bergerak searah gerakan pelempar bola, sedang gambar *b* juga memperlihatkan sebuah lintasan Parabola jika dilihat pengamat yang diam di tanah.

Pada bab ini akan dibahas materi yang berkaitan dengan fenomena yang diilustrasikan diatas yaitu berkaitan dengan relasi dan fungsi, kemudian dilanjutkan dengan permasalahan yang terkait dengan fungsi yaitu persamaan fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi eksponensial dan fungsi logaritma.



Gambar 6.1.1 Sumber : "*Fisika*"Tipler

2.6 FUNGSI DAN RELASI

Topik penting yang sering dijumpai dalam matematika adalah relasi dan fungsi. Kedua topik ini muncul karena adanya hubungan atau ketergantungan antara satu besaran dengan besaran lainnya. Seringkali, hubungan ini didapatkan dari permasalahan yang kita hadapi sehari-hari. Sebagai contoh, adanya hubungan antara pegawai pada suatu perusahaan dengan bagian/departemen tertentu pada perusahaan tersebut, hubungan antara luas lingkaran dengan panjang jari-jarinya, hubungan antara nama-nama siswa dalam suatu kelas dengan kesukaan (hobby)nya, hubungan antara nama-nama kabupaten di suatu propinsi dengan jumlah penduduknya, hubungan antara biaya produksi dengan jumlah produk yang dihasilkan oleh sebuah pabrik, dan lain-lain.

Dari beberapa contoh diatas, dapat dimengerti bahwa suatu relasi terjadi antara satu kelompok tertentu dengan kelompok lainnya, misalnya antara kelompok siswa dengan kelompok hoby. Dalam matematika, istilah kelompok ini dikenal dengan istilah **himpunan**. Setiap himpunan mempunyai anggota (himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong). Dalam penulisannya, suatu himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf kapital (huruf besar), misal A, B, C,.... sedangkan anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil, misal a, b, c, ... **Relasi** dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai aturan yang memadankan/ memetakan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B. Untuk memperjelas konsep ini, perhatikan Contoh 6.1.1 yang menyatakan relasi antara himpunan siswa dengan himpunan kesukaan:

CONTOH 2.6.1

A = himpunan siswa dalam suatu kelas

= {Agus, Bima, Cakra, Durna}

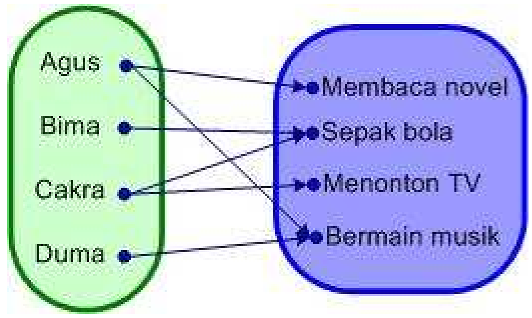
B = himpunan kesukaan

= {membaca novel, sepak bola, menonton TV, bermain musik}

Relasi antara kedua himpunan misalkan ditentukan berikut:

- ✓ Agus suka membaca novel dan bermain musik
- ✓ Bima menyukai sepakbola
- ✓ Durna suka bermain musik
- ✓ Cakra suka sepakbola dan menonton TV

Relasi ini dapat digambarkan dalam bentuk diagram berikut:



Gambar 6.1.1

atau dapat juga dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut sebagai berikut:

{(Agus, membaca novel), (Agus, bermain musik), (Bima, sepakbola), (Durna, bermain musik), (Cakra, sepakbola), (Cakra, menonton TV)}

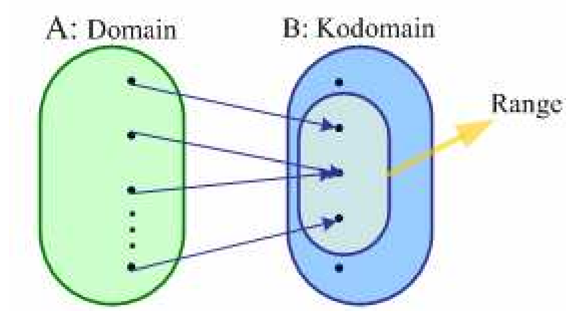
Fungsi merupakan salah satu bentuk khusus dari relasi. Misalkan A dan B adalah dua himpunan, dimana anggota himpunan B tergantung pada anggota himpunan A. misalkan pula x adalah anggota A dan y adalah anggota B. **Fungsi** dari A ke B adalah aturan yang memadankan setiap anggota dalam himpunan A dengan tepat pada satu anggota dalam himpunan B. Kita dapat mendefinisikan secara formal dalam definisi 6.1.1 berikut.

DEFINISI 2.6.1:

Sebuah **fungsi *f*** adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek *x* dalam satu himpunan yang disebut **daerah asal**, dengan sebuah nilai *f*(*x*) dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh disebut **daerah nilai** fungsi tersebut.

Dengan kata lain, pemetaan dari *x* terhadap *y* disebut fungsi jika:

- untuk setiap *x* dalam A dapat dicari nilai *y* dalam B yang merupakan nilai/ pasangannya. Elemen *x* di A dihubungkan oleh *f* dengan elemen *y* di B, ditulis *xfy* atau ***y=f(x)***.
- untuk satu *x* kita mempunyai satu dan hanya satu nilai y.

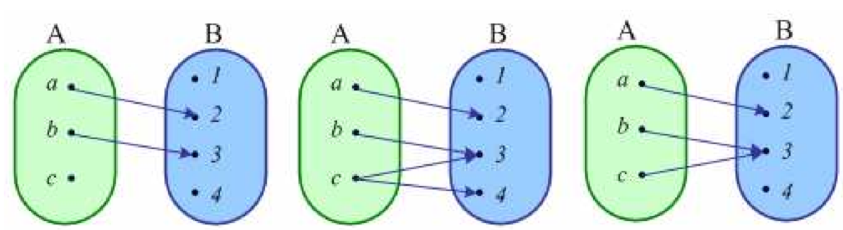


Gambar 6.1.2

Himpunan A disebut daerah asal atau **domain** dan himpunan B disebut daerah kawan atau **kodomain**. Himpunan bagian dari B, misalkan R, yang berisi nilai-nilai yang merupakan hasil dari pemetaan fungsi atas anggota dari daerah asal disebut daerah hasil atau **range**. Untuk memperjelas konsep diatas, perhatikan dua contoh berikut ini.

CONTOH 2.6.2

Diberikan 3 contoh relasi pada Gambar 6.1.3 (a), (b), dan (c), tentukan mana yang fungsi dan yang bukan fungsi.



(a) (b) (c)

Gambar 6.1.3

Jawab:

Relasi pada Gambar 6.1.3(a) bukan merupakan fungsi, karena elemen *c* di daerah asal tidak dipetakan pada daerah hasil. Relasi pada Gambar

6.1.3(b) bukan merupakan fungsi, karena elemen *c* mempunyai kawan lebih dari satu di daerah hasil. Relasi pada Gambar 6.1.3(c) merupakan fungsi, karena setiap elemen dari domain mempunyai satu kawan di daerah hasil. Pada Gambar 6.1.3(c), domain fungsi adalah himpunan A dan kodomainnya adalah B. Karena nilai fungsi hanya 2 dan 3 saja maka daerah hasil (*range*) fungsi adalah R = {2, 3}.

CONTOH 2.6.3

Berdasarkan pengalaman penyelam, tekanan cairan *p* bergantung pada kedalaman *d*. Berdasarkan data selama penyelaman yang dilakukan,

hubungan antara *p* dan *d* tersebut dapat dinyatakan dalam tabel berikut:

kedalaman (*d*)	Tekanan cairan (*p*)
10 meter	2,1 atm.
20 meter	3,2 atm.
30 meter	4,3 atm.
40 meter	5,4 atm.
50 meter	6,5 atm.
60 meter	7,6 atm.
70 meter	8,7 atm.
80 meter	9,8 atm.
90 meter	10,9 atm.

Tentukan apakah hubungan tersebut menyatakan fungsi ?.

Jawab:

Pada contoh diatas, pemetaan dari A ke B dapat digambarkan sebagai berikut : kawan dari 10 adalah 2,1, kawan dari 20 adalah 3,2 dan kawan dari 30 adalah 4,3 dan seterusnya. Hukum fisika juga mengatakan bahwa tekanan cairan *p* bergantung pada kedalaman *d*. Jadi tidak mungkin terjadi pada kedalaman yang sama mempunyai tekanan yang berbeda. Jadi *f* merupakan fungsi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$f(10) = 2{,}1$, $f(20) = 3{,}2$, dan $f(30) = 4{,}3$ dan seterusnya. Karena kedalaman yang diperoleh dari data: $0 \leq d \leq 90$, maka daerah asal (domain) fungsi tersebut yaitu A adalah bilangan positip yang dapat ditulis A={d / $0 \leq d \leq 90$), daerah kawan (kodomain) fungsi yaitu B tekanan adalah lebih atau sama dengan 1 (satu) atau dapat ditulis B={p / $2{,}1 \leq p \leq 10{,}9$}.

2.6.1 JENIS-JENIS FUNGSI

Ditinjau dari cara mengkawankannya, fungsi dapat dibedakan menjadi 3 jenis yaitu fungsi *injektif*, *surjektif*, dan *bijektif*. Jenis fungsi tersebut ada kaitannya dengan sifat pemetaan dari daerah asal ke daerah hasil . Ketiga jenis fungsi tersebut adalah :

ii) Fungsi Injektif
iii) Fungsi Surjektif
iv) Fungsi Bijektif

DEFINISI 2.6.2:

Misalkan *f* adalah fungsi dari himpunan A ke B maka:

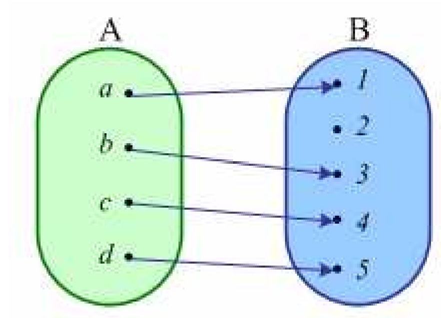
i) Fungsi *f* disebut ***injektif*** jika untuk setiap elemen *y* di daerah nilai, *y* paling banyak mempunyai satu kawan dari *x* di A. Dengan kata lain, *fungsi injektif* adalah *fungsi satu-satu.*

ii) Fungsi *f* disebut ***surjektif*** jika untuk setiap elemen *y* di B habis dipetakan oleh anggota himpunan di A.

Fungsi *f* disebut ***bijektif*** jika fungsi itu injektif dan surjektif

CONTOH 2.6.4

Diketahui fungsi *f* dengan aturan pemetaan seperti pada Gambar 8.1.4 Tunjukkan bahwa fungsi tersebut injektif.



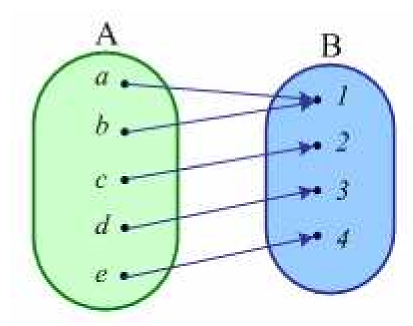
Gambar 6.1.4

Jawab:

Pertama dicari dulu daerah hasil (range) fungsi tersebut yaitu {1,3,4,5} dan kodomain B = {1, 2, 3, 4, 5}. Sekarang kita selesaikan persamaan *f(x)* = *y* jika *y* anggota {1, 3, 4, 5} di daerah hasil. y=1 merupakan pemetaan hanya satu anggota dari daerah asal yaitu *x*=a. Jika *y* = 3 merupakan pemetaan hanya satu anggota dari daerah asal yaitu *x*=b. Demikian juga, jika *y* = 4, 5 maka merupakan pemetaan hanya satu anggota dari daerah asal yaitu masing-masing c dan d. Dengan demikian, *f* adalah injektif (fungsi satu-satu).

CONTOH 2.6.5

Diketahui fungsi *f* dengan aturan pemetaan seperti pada Gambar 6.1.5. Tunjukkan bahwa fungsi itu surjektif.



Gambar 6.1.5

Jawab:

Dari gambar tampak bahwa A = (*a, b, c, d, e* } dan B = {1, 2, 3, 4}.

Kemudian kita uji persamaan $f(x)=y$ dengan y semua kemungkinan elemen di B.

Jika $y=1$ maka persamaan tersebut merupakan pemetaan $f(a)= 1$, $f(b)=1$.

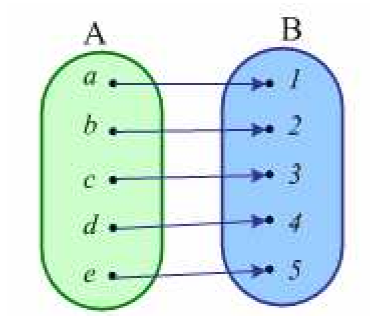
Kemudian untuk $y=2$ merupakan pemetaan dari $f(c)=2$.

Demikian pula untuk $y=3$ merupakan pemetaan dari $f(d)=3$ dan untuk $y=4$ diperoleh dari pemetaan $f(e)=4$.

Karena untuk semua y, persamaan selalu mempunyai jawaban, maka fungsi yang diketahui bersifat surjektif.

CONTOH 2.6.6

Diketahui fungsi f dengan aturan pemetaan seperti pada Gambar 6.1.6. Perlihatkan bahwa f adalah bijektif.



Gambar 6.1.6

Jawab:

Kita harus menguji bahwa persamaan $y=f(x)$ dengan y anggota B harus mempunyai jawab dan banyaknya jawab hanya satu. Dari gambar tersebut dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Ruas kanan y	Jawab persamaan x
1	a
2	b
3	c
4	d
5	e

Karena untuk setiap y anggota B persamaan *y*=*f*(*x*) selalu merupakan teman pemetaan di *x* dan paling banyak satu, maka *f* adalah fungsi yang bersifat bijektif.

Latihan 6.1

1. Diketahui fungsi $f(x) = x - 2$ dengan daerah asal $D = \{x|0 \leq x \leq 5, x \in R\}$
   a. Tentukan nilai fungsi untuk *x* = 0, *x* = 1, *x* = 2, *x* = 3, *x* = 4, dan *x* = 5
   b. Gambarkan sketsa grafik untuk fungsi *f*
   c. Tentukan apakah fungsi tersebut surjektif, injektif atau bijektif
   d. Tentukan daerah hasil (kodomain) dari fungsi *f*
2. Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ dengan daerah asal $D = \{x|2 \leq x \leq 5 \text{ dan } x \in R\}$.
   a. Tentukan nilai fungsi untuk x = 2, x =3, x = 4 dan x = 5
   b. Gambarkan sketsa grafik untuk fungsi f
   c. Tentukan apakah fungsi tersebut surjektif, injektif atau bijektif
   d. Tentukan daerah hasil (kodomain) dari fungsi f.

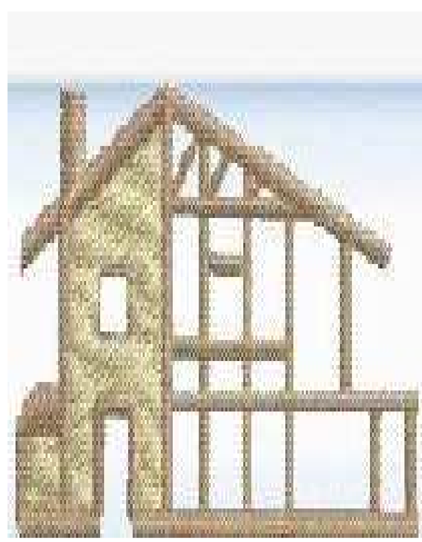
3. Tentukan apakah fungsi $f(x) = x^2, x \in R$ fungsi surjektif, injektif atau bijektif. Bagaimana Anda menentukan domain fungsi supaya fungsi tersebut bersifat bijektif?
4. Tentukan daerah asal alami fungsi-fungsi berikut :
   a. $f(x) = 3x - 2$ b. $f(x) = x^2 - 2$

   d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ d. $f(x) = \frac{1}{x-2}$
5. Misalkan $y^2 = x$.
   a. Jika $x = 5$, Carilah nilai y.
   b. Apakah $y^2 = x$ merupakan fungsi.

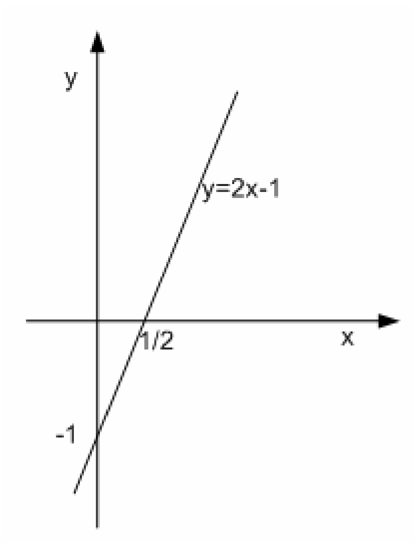
2.7 FUNGSI LINEAR

Suatu fungsi y=f(x) disebut fungsi linear jika aturan untuk mengawankan antara x dan y yang berbentuk $y = mx + b$

dengan m dan b adalah bilangan r Daerah definisi dan daerah h terbesar dari fungsi ini ada himpunan bilangan real. Jika fu ini dinyatakan dalam bentuk gr maka grafik dari fungsi ini a berbentuk garis lurus, dengan menyatakan nilai kemiringan g terhadap sumbu X dan b ada perpotongan garis dengan sumbu



Ciri khas fungsi linear adalah dia tumbuh pada laju tetap. Sebagai contoh, Gambar 6.2.1 menunjukkan grafik fungsi linear $y = 2x - 1$ dan tabel nilai fungsi untuk beberapa nilai *x*. Perhatikan bahwa jika nilai *x* bertambah 1, maka nilai *y* bertambah 2. Sehingga nilai *y* bertambah 2 kali lebih cepat dari *x*. Jadi, kemiringan grafik $y = 2x - 1$ yaitu 2, dapat ditafsirkan sebagai laju perubahan *y* terhadap *x*.



Gambar 6.2.1

Nilai x	Nilai $y = 2x - 1$
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
3	5

2.7.1 MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI LINEAR

Fungsi linear mempunyai keistimewaan yaitu jika diketahui nilai dari dua anggota, maka aturan keseluruhannya dapat diketahui. Sifat ini serupa dengan garis. Melalui dua titik kita dapat menentukan satu garis. Dengan demikian, untuk menggambar grafik fungsi linear dapat dilakukan dengan cara berikut:

i. tentukan dua buah nilai *x* sembarang, kemudian tentukan nilai *y* untuk masing-masing nilai *x* berdasarkan aturan fungsi tersebut, sehingga kita dapatkan dua buah titik yang memenuhi fungsi tersebut

ii. plot dua titik tersebut pada bidang koordinat, kemudian hubungkan kedua titik tersebut sehingga akan terbentuk garis lurus. Garis lurus inilah grafik fungsi linear $y = mx + b$

Untuk memperjelas hal ini, perhatikan contoh berikut.

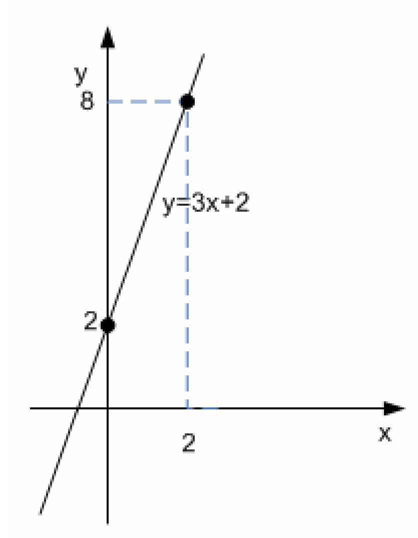
CONTOH 2.7.1

Diketahui fungsi linear $y = 3x + 2$. Gambarlah grafik fungsi tersebut.

Jawab:

Pertama, pilihlah dua titik *x*, misalkan *x*=0 dan *x*=3. Kemudian hitung nilai *y* untuk masing-masing nilai *x*. Untuk *x* = 0 maka *y* = 3.0 + 2 = 2, sehingga didapatkan titik yang memenuhi fungsi tersebut yaitu (0, 2) dan untuk *x* = 2 maka y = 3.2 + 2 = 8 sehingga didapatkan titik (2,8).

Grafik fungsi $y = 3x + 2$ berupa garis lurus, sehingga cukup menghubungkan keduatitik (0,2) dan (2,8), sehingga kita dapatkan grafiknya gambar 6.2.2

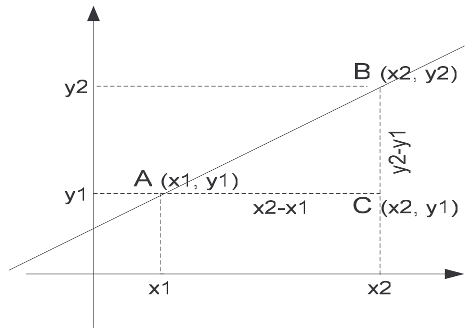


Gambar 6.2.2: Grafik fungsi $y = 3x + 2$

Karena bentuk umum dari fungsi linear $y = mx + b$ merupakan persamaan garis lurus, maka kita bisa menentukan persamaan grafik fungsi linear (garis lurus) dengan beberapa cara, antara lain:

- menentukan persamaan garis lurus jika diberikan dua titik yang dilalui garis tersebut
- menentukan persamaan garis lurus jika diketahui gradien dan satu titik yang dilalui garis tersebut
- menentukan persamaan garis lurus jika diketahui grafiknya

Seperti dijelaskan diatas, pada persamaan garis lurus $y = mx + b$, nilai *m* merupakan kemiringan garis terhadap sumbu *X* atau lebih dikenal dengan istilah ***gradien*** garis lurus tersebut. Sebagai contoh, persamaan garis $y = 3x + 2$ mempunyai gradien 3 dan persamaan $y = -x - 3$ mempunyai gradien -1. Jadi, untuk menentukan persamaan garis lurus, kita harus bisa menentukan dan mendapatkan gradien garis tersebut (Gambar 6.2.3). Misalkan garis ini melalui dua titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2). Dari gambar tersebut dapat diperoleh kemiringan garis tersebut. Untuk mendapatkan gradien garis lurus, perhatikan gambar garis lurus berikut:



Gambar 6.2.3

Dari gambar garis lurus diatas, dapat dibuat suatu segitiga siku-siku ACB. Dapat ditunjukkan bahwa gradien garis lurus adalah:

$$grad_{AB} = m_{AB} = \frac{panjang\ sisi\ tegak\ BC}{panjang\ sisi\ miring\ AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

dengan $x_2 \neq x_1$.

CONTOH 2.7.2

Tentukam Gradien garis yang melalui titik-titik A(0, 2) dan B(2, 8)

Jawab:

Gradien garis yang melalui titik-titik A(0, 2) dan B(2, 8) adalah

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$$

2.7.2 PERSAMAAN GARIS LURUS YANG MELALUI SEBUAH TITIK DENGAN GRADIEN DIKETAHUI

Melalui sebuah titik sembarang dapat dibuat tak berhingga garis, tetapi melalui satu titik dan satu kemiringan hanya dapat dibuat satu garis.

Bagaimana cara mendapatkan Garis L : $y = mx + b$ yang melalui sebuah titik A(x_1,y_1) dengan gradien *m*. Misalkan B(*x,y*) adalah sembarang titik pada garis L maka pastilah persamaan garis itu adalah :

$$y = mx + b$$

Oleh karena persamaan garis lurus tersebut melalui sebuah titik A(x_1, y_1) maka (x_1, y_1) memenuhi persamaan garis L : $y = mx + b$

sehingga $y_1 = mx_1 + b$.

Dari kedua persamaan yang kita peroleh, disubtitusikan :

$$y - mx = y_1 - mx_1$$

atau

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (6.2.1)$$

2.7.3 PENENTUAN PERSAMAAN GARIS LURUS YANG MELALUI DUA TITIK

Seperti dijelaskan diatas, komponen penting dalam persamaan garis $y = mx + b$ adalah gradien garis (*m*) dan komponen perpotongan dengan sumbu *Y* yaitu *y*(0)=b. Untuk mendapatkan persamaan garis lurus yang melalui dua titik A dan B, kita bisa menentukan nilai *m* terlebih dahulu dengan rumus pencarian gradien yang melalui satu titik dengan cara sebagai berikut: Misalkan persamaan garis $y = mx + b$. Melalui titik (x_1,y_1) maka persamaan $y = mx + b$ berlaku untuk pasangan (x_1,y_1)

sehingga $y_1 = mx_1 + b$ diperoleh $b = y_1 - mx_1$. Oleh karena itu persamaan garis yang melalui titik (x_1,y_1) dan mempunyai gradien *m* adalah :

$$y = mx + b$$

$$\Rightarrow y = mx + (y_1 - mx_1)$$

$$\Rightarrow y - y_1 = mx - mx_1$$

$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dengan cara yang sama kita bisa juga mendapatkan persamaan garis lurus yang melalui titik B(x_2,y_2) adalah:

$$y - y_2 = m(x - x_2)$$

yang akan menghasilkan persamaan dari sebuah garis yang sama. Dengan mensubtitusikan kedua persamaan yang didapat, kita peroleh persamaan garis melalui dua buah titik :

$$\frac{y - y_2}{y_1 \quad y_2} = \frac{x - x_2}{x_1 \quad x_2} \qquad (8.2.2)$$

2.7.4 KEDUDUKAN DUA BUAH GARIS LURUS

Misalkan ada dua buah garis lurus L$_1$: $y_1 = m_1 x + b$

dan L$_2$: $y_2 = m_2 x + b$

Kedudukan L_1 terhadap L_2 tergantung pada tangen arah kedua garis tersebut, yaitu m_1 dan m_2 yang dapat diuraikan pada sifat kedudukan dua buah garis lurus sebagai berikut :

i. Jika $m_1 = m_2$ maka kedua garis L_1 dan L_2 saling sejajar.
ii. Jika $m_1 \cdot m_2 = -1$ maka kedua garis L_1 dan L_2 saling tegak lurus.
iii. Jika $m_1 \neq m_2$ dan $m_1 \cdot m_2 \neq -1$ maka kedua garis berpotongan.

2.7.5 INVERS FUNGSI LINEAR

Jika hasil pemetaan fungsi $y = f(x)$ dipetakan lagi oleh pemetaan g hasilnya kembali ke titik semula yaitu x, $g(f(x))=x$ maka g dikatakan invers dari f. Salah satu ide menentukan invers $y = f(x)$ adalah mengubah x sebagai fungsi dari y, yaitu $x = g(y)$. Kadang-kadang proses seperti itu merupakan proses yang mudah atau ada kalanya cukup rumit. Namun untuk fungsi linear, proses mengubah $y = f(x)$ menjadi $x = g(y)$ cukuplah sederhana. Sebagai contoh fungsi linear

$$y = 5x + 1 \qquad (y = f(x))$$

Mengubah x sebagai fungsi dari y:

$$x = \frac{1}{5}(y - 1) \qquad (x = g(y))$$

Perhatikan $x = g(y)$, jika x diganti dengan y dan y diganti dengan x diperoleh fungsi $y = g(x)$, proses yang demikian ini merupakan *proses menentukan fungsi invers.* Jadi $y = g(x)$ invers dari $y = f(x)$ dan $y = f(x)$ invers dari $y = g(x)$. Secara formal fungsi invers diberikan sebagai berikut :

DEFINISI 2.7.1:

Jika *y*=*f*(*x*) dan *y*=*g*(*x*) adalah fungsi dan jika $f(g(x)) = x$ atau $g(f(x)) = x$ maka ***f* invers dari *g*** atau ***g* invers dari *f***.

CONTOH 2.7.3

Dapatkan persamaan garis lurus yang melalui titik-titik A(0, 2) dan B(2, 8).

Jawab:

Menentukan persamaan garis lurus melewati titik A(0, 2) dan B(2, 8) adalah sebagai berikut :

$$\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{y - 2}{8 - 2} = \frac{x - 0}{2 - 0}$$

$$y = 3x + 2$$

CONTOH 2.7.4

Tentukan apakah garis-garis berikut sejajar, berpotongan, jika berpotongan tentukan titik potongnya.

$p : 2y = 6x + 2$; $r : y = -\frac{1}{3}x + 1$; $s : y + 2x + 1 = 0$

Jawab :

p : $2y = 6x + 2$ mempunyai gradien $m = 3$

r : $y = -\frac{1}{3}x + 1$ mempunyai gradien $m = -\frac{1}{3}$

s : $y = -2x - 1$ mempunyai gradien $m = -2$

Jadi garis *p* berpotongan secara **tegak lurus** dengan garis *r* , dan garis *p* berpotongan dengan garis *s*, garis *r* berpotongan dengan garis *s*.

Titik potong garis *p* dan *r* adalah (0,1)

Titik potong garis *p* dan *s* adalah $\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

Titik potong garis *r* dan *s*: $\left(\frac{-6}{5}, \frac{7}{5}\right)$

CONTOH 2.7.5

Tentukan invers dari fungsi $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ dan jika diketahui

Jika $f^{-1}(x) = 5$ tentukan nilai *x*.

Jawab:

$y = -\frac{1}{2}x + 1$ maka $x = 2(y-1)$. Jadi $f^{-1}(x) = 2 - 2x$

dan $x = f(f^{-1}(x)) = f(5) = -\frac{3}{2}$.

Latihan 6.2

1. Tentukan aturan fungsi linear yang mempunyai nilai 2 di x = -3 dan mempunyai nilai -2 di *x* = -1.
2. Diketahui persamaan garis *y*=3*x*-2
   (a). Tentukan gradien dan titik potong fungsi pada sumbu y
   (b) Ujilah apakah titik (-2,-8) terletak pada garis tersebut.
   (c) Jika koordinat pertama titik pada (a) ditambah satu, bagaimana nilai dari koordinat kedua.

3. Gambarkan sketsa grafik untuk fungsi-fungsi linear berikut:

   (a). $y = -3 + 5$ (b). $y = -\frac{3}{2}x - 4$

   (c). $y = x + \frac{2}{5}$ (d). $2y = 3x\text{-}5$

4. Dapatkan kemiringan sisi-sisi segi tiga dengan titik sudut- titik sudut (-1,2), (6.5) dan (2,7).
5. Diketahui persamaan garis dan titik (*a, b*) pada garis tersebut. Jika koordinat pertamakita tambah satu, maka koordinat kedua akan bertambah 4. Tentukan pertambahan/pengurangan koordinat kedua jika koordinat pertama ditambah 2.
6. Berdasarkan pengalaman penyelam, tekanan cairan *p* bergantung pada kedalaman *d* yang memenuhi rumus $p = kd + 1$ dengan *k* konstan.

   (a) Hitunglah tekanan pada permukaan cairan.

   (b) Jika tekanan pada kedalaman 100 meter adalalh 11 atm, hitunglah tekanan pada kedalaman 50 meter.
7. Pengelola sebuah pasar kaget pada akhir minggu mengetahui dari pengalaman bahwa jika ia menarik *x* dolar untuk sewa tempat di pasar itu, maka banyaknya lokasi *y* yang dapat disewakan diberikan dalam bentuk persamaan $y = 200 - 4x$.

   (a).Sketsalah grafik fungsi linear (Perhatikan bahwa sewa tiap lokasi dan banyaknya lokasi yang disewakan tidak dapat bernilai negatip)

   (b).Apa yang dinyatakan oleh kemiringan perpotongan sumbu-y dan perpotongan sumbu-x dari grafik?

8. Kaitan antara skala suhu Fahrenheit (F) dan Celsius (C) diberikan oleh fungsi linear $F = \frac{9}{5}C + 32$.

   (a). Sketsalah grafik fungsi F.

   (b). Berapa kemiringan grafik dan apa yang dinyatakannya?

9. Suatu titik mula-mula berada pada posisi ((7.5), bergerak sepanjang garis dengan kemiringan m = -2 ke posisi baru (x , y)

   a). Dapatkan nilai y jika x = 9.

   b). Dapatkan nilai x jika y = 12.

10. Klasifikasikan garis-garis yang diberikan : sejajar, tegak lurus atau tidak keduanya.

    a) $y = 4x + 9$ dan $y = 4x + 9$

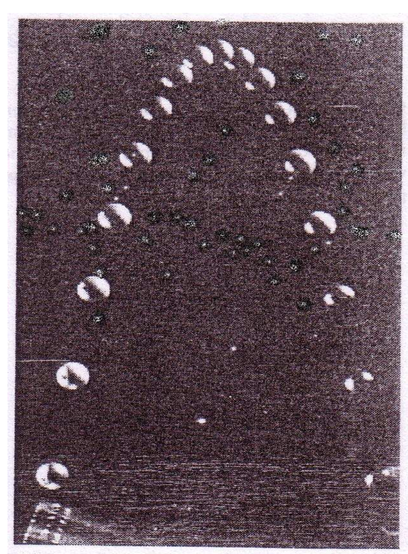
    b) $y = \frac{-3}{2}x - 4$ dan $y = 7 - \frac{1}{2}x$

    c) $10x - 6y + 7 = 0$ dan $5x - 3y + 6 = 0$

    d) $y - 2 = 4(x - 6)$ dan $y - 7 = \frac{1}{4}(x - 3)$

2.8 FUNGSI KUADRAT

Fungsi dari Garis lengkung_ yang m untuk dipelajari adalah fungsi mempunyai bentuk persamaan kuad



alam ini yang secara tidak langsung lengkungan yang mempunyai bentuk persamaan kuadrat telah anda kenal adalah bentuk-bentuk pada jembatan gantung, daun jendela yang lengkung, jarak yang ditempuh oleh lemparan bola secara vertical terhadap waktu (Gambar 6.3.1) dan masih banyak lagi contoh contoh fungsi kuadrat.

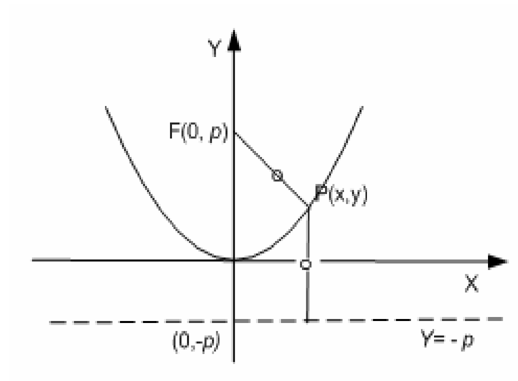
Grafik fungsi kuadrat ini disebut ***parabola***.

Parabola diperoleh dengan menentukan tempat kedudukan atau himpunan semua titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah garis *l* dan sebuah titik (Gambar 6.3.2). Titik tetap tersebut dikatakan *focus* dan garis tersebut dikatakan *Garis arah*. Jika fokus F disebelah atas titik asal, misalkan di $(0, p)$, garis arah kita ambil di sebelah bawah titik asal dengan persamaan $y = -p$, dan jika suatu titik (x, y) terletak pada lengkungan parabola jika dan hanya jika

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-p))^2}$$

atau ekivalen dengan

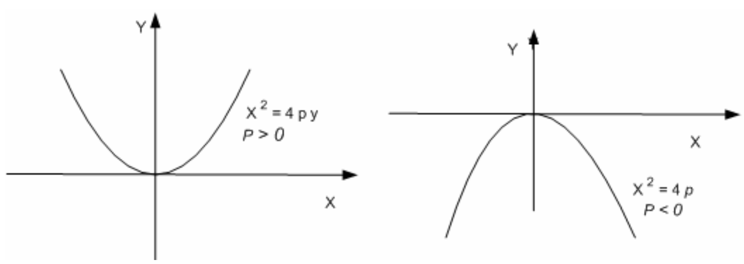
$$x^2 = 4py \qquad (6.3.1)$$



Gambar (6.3.2)

Persamaan (6.3.1) disebut ***bentuk baku*** sebuah persamaan parabola yang terbuka ke atas. Jika $p > 0$ maka p merupakan jarak dari fokus ke puncaknya.

Fungsi kuadrat mempunyai 2 jenis baku yang berbentuk Parabola, tergantung dari terbukanya parabola mengarah kemana. Misalkan persamaan parabola diberikan oleh $x^2 = 4py$, jika $p > 0$ maka parabola terbuka keatas dan jika $p < 0$ maka terbuka kebawah. Kedua jenis parabola itu dapat dilihat pada Gambar 6.3.3.



Gambar 6.3.3

CONTOH 2.8.1

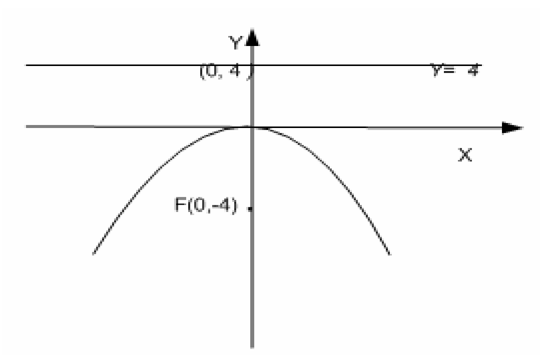
Tentukan fokus dan garis arah parabola serta sketsa parabolanya untuk persamaan $x^2 = -16y$.

Penyalesaian :

Oleh karena persamaan parabola diketahui $x^2 = -16y$ maka parabola terbuka ke bawah dan puncaknya berada di titik asal. Fokus diperoleh dari nilai *p* untuk persamaan $x^2 = 4py$. Dari $x^2 = -16y$ diperoleh

$$x^2 = 4(-4)y\text{ , maka } p = -4.$$

Sehingga fokus berada di (0,-4), dan garis arahnya adalah *y* = 4.



2.8.1 BENTUK UMUM PARABOLA

Bentuk umum persamaan fungsi kuadrat (parabola) yang mempunyai puncak di (*q*,*r*) adalah :

$$(x - q)^2 = 4p(y - r) \qquad (6.3.2)$$

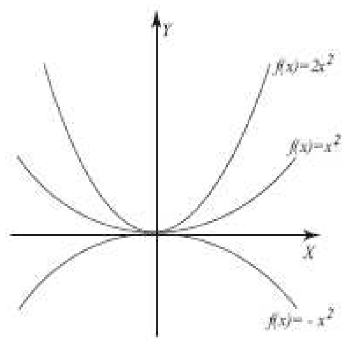
Persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk ekivalen :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (6.3.3)$$

dengan $a = -\frac{1}{4p}$, $b = \frac{r}{2p}$, $c = \frac{r^2 - 4pq}{4p}$.

Persamaan (6.3.3) merupakan *persamaan kuadrat dalam x* yang grafiknya berupa *parabola*. dengan *a, b* dan *c* bilangan real diketahui dan $a \neq 0$. Daerah asal terbesar dari fungsi kuadrat ini adalah seluruh bilangan real. Jika tidak dibatasi nilainya, fungsi ini mempunyai daerah asal seluruh bilangan real. Grafik parabola memiliki satu diantara dua bentuk yang ditunjukkan gambar (6.3.4) tergantung koefisien variabel yang berpangkat dua. Parabola dengan Persamaan (6.3.3) terbuka keatas jika $a > 0$, terbuka ke bawah jika $a < 0$. Dengan demikian untuk persamaan $x = ay^2 + by + c$ merupakan parabola yang terbuka ke kanan jika $a > 0$, terbuka ke kiri jika $a < 0$. (Persamaan $x = ay^2 + by + c$ bukan termasuk fungsi, tetapi suatu relasi yang gambarnya berupa parabola). Nilai fungsi pada suatu titik $x = t$ dapat dihitung dengan mengganti *x* dengan *t*. Sebagai contoh, $f(x) = 2x^2 + x - 3$ adalah fungsi kuadrat dengan $a = 2$, $b = 1$ dan $c = -3$. Nilai $f(x)$ untuk $x = 2$ adalah $f(2) = 2(2^2) + 2 - 3 = 7$.

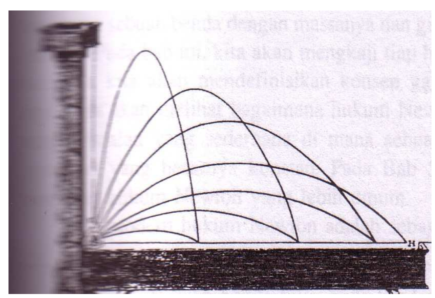
Sekarang kita tinjau kembali fungsi kuadrat yang mempunyai bentuk paling sederhana yaitu fungsi yang mempunyai aturan $f(x) = 2x^2$. Grafik fungsi ini terletak di atas sumbu *X* sebab untuk semua nilai *x*, fungsi bernilai positif. Karena nilai fungsi untuk $x = t$ sama dengan $x = -t$, maka grafik fungsi ini simetri terhadap sumbu *Y* . Selanjutnya sumbu *Y* disebut *sumbu simetri*. Titik (0,0) merupakan titik paling rendah/minimum dan disebut titik balik atau puncak parabola. Sebutan yang biasa dari grafik parabola ini adalah membuka ke atas dengan titik balik minimum (0,0). Grafik dari fungsi kuadrat dengan aturan $f(x)=ax^2$ serupa dengan grafik $f(x) = x^2$, dapat diperoleh dari x^2 dengan mengalikan setiap koordinat dengan *a*. Grafik $f(x) = ax^2$ dengan $a>0$ akan membuka ke atas. Sedangkan grafik $f(x) = ax^2$ dengan $a < 0$ akan membuka ke bawah. (perhatikan Gambar 6.3.4)



Gambar 6.3.4. Grafik beberapa fungsi $y = ax^2$

2.8.2 MENENTUKAN PUNCAK, PERSAMAAN SUMBU SIMETRI DAN KOORDINAT FOKUS SUATU PARABOLA

Grafik parabola memiliki satu diant bentuk yang ditunjukkan dalam 6.3.5, tergantung apakah *a* positip negatip. Dalam kedua



kasus parabola tersebut simetri terhadap garis vertikal yang sejajar sumbu *Y*. Garis simetri ini memotong parabola pada suatu titik yang disebut *puncak* parabola. Puncak tersebut merupakan titik terendah (minimum) pada kurva jika $a > 0$ dan titik tertinggi (maksimum) jika $a < 0$. Koordinat-*x* dari puncak, atau disebut juga titik ekstrim. Parabola mempunyai Persamaan Sumbu Simetri diberikan oleh rumus:

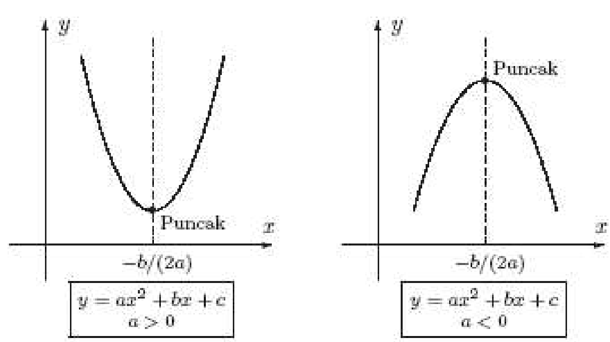
$$x = -\frac{b}{2a} \qquad (6.3.4)$$

Puncak Parabola pastilah berada pada sumbu simetri, sehingga koordinat

puncak parabola : $$(x, y) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}) \qquad (6.3.5)$$

Fokus parabola : $$p = -\frac{1}{4a} \qquad (6.3.6)$$

Dengan bantuan rumus ini, grafik yang cukup akurat dari suatu persamaan kuadratik dalam *x* dapat diperoleh dengan menggambarkan puncak dan titik potong dengan sumbu-sumbu koordinatnya atau dua titik pada tiap sisinya. Seringkali perpotongan parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan sumbu-sumbu koordinat penting untuk diketahui. Perpotongannya dengan sumbu-*Y*, *y* = c, didapat langsung dengan memberikan *x* = 0. Untuk mendapatkan perpotongan-*x,* jika ada, haruslah diberikan *y* = 0 dan kemudian menyelesaikan persamaan kuadrat yang dihasilkan dari $ax^2 + bx + c = 0$.



Gambar 6.3.5

CONTOH 2.8.2

Gambarkan grafik parabola dan tandai puncak dan perpotongannya dengan sumbu-sumbu koordinat.

a) $y = x^2 - 3x - 4$

b) $y = -x^2 + x$

Penyelesaian :

a) Grafik fungsi $y = x^2 - 3x - 4$ mempunyai :

Sumbu Simetri : $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-(-3)}{2.1} = \frac{3}{2}$

Puncak di $(x, y) = (\frac{3}{2}, -\frac{(-3)^2 - 4.1.(-4)}{4.1}) = (\frac{3}{2}, -\frac{25}{4})$

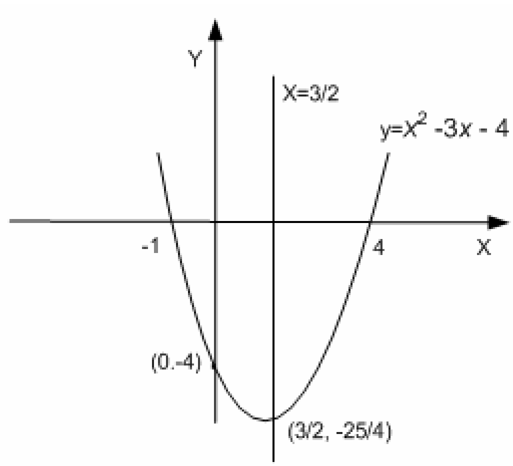
Titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat:

Dengan sumbu *Y* : $x = 0 \Rightarrow y = -4$

Dengan sumbu *X* : $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 3x - 4$

Atau $0 = (x - 4)(x + 1)$

Jadi titik potong dengan sumbu *X* di $(4,0)$ dan (-1.0), dengan sumbu *Y* di $(0,-4)$



b) Grafik fungsi $y = -x^2 + x$ mempunyai :

Sumbu Simetri : $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2}$

Puncak di $(x, y) = (\frac{1}{2}, -\frac{(1)^2 - 4.(-1).0}{4.(-1)}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

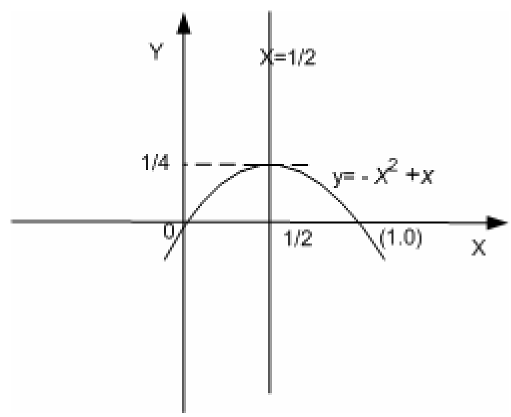
Titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat:

Dengan sumbu Y : $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Dengan sumbu X : $y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + x$

atau $x = 0, \quad x = 1$

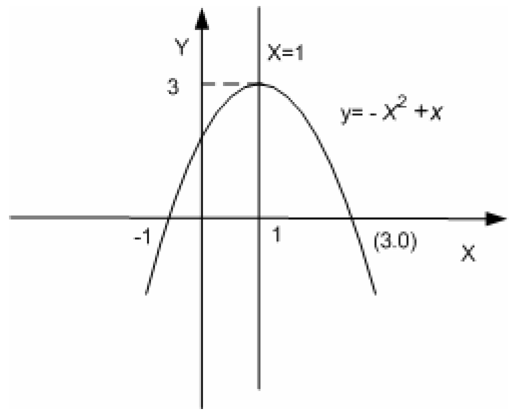
Jadi titik potong dengan sumbu di $(0,0)$ dan (1.0)



CONTOH 2.8.3

Diketahui kurva parabola pada gambar berikut :

Tentukanlah persamaan parabola gambar disamping.



Penyelesaian :

Parabola terbuka kebawah, tentulah koefisien dari x^2 bernilai negatip. Dari sumbu simetri : x = 1, maka $1 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -2a = b$

$$y = ax^2 + bx + c = ax^2 + (-2a)x + c$$

Grafik melalui (1,3) maka $3 = a(1) + (-2a)(1) + c \Rightarrow c = 3 + a$

Jadi persamaannya menjadi : $y = ax^2 + (-2a)x + (3 + a)$

Grafik melalui (-1,0) , maka $0 = a + 2a + (3 + a)$

atau $a = \frac{-3}{4}$, selanjutnya diperoleh $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{9}{4}$.

Jadi persamaan parabola dari grafik yang diberikan tersebut adalah:

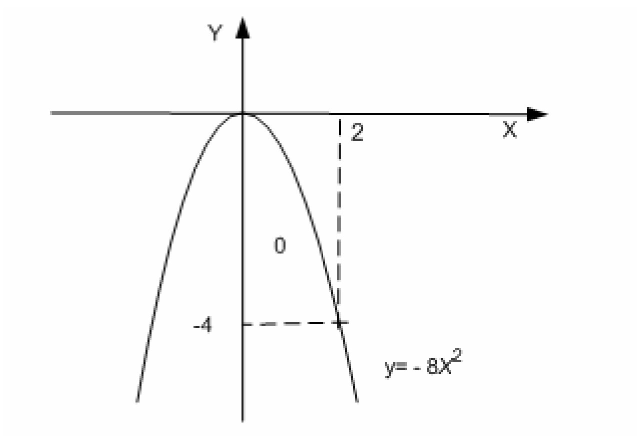
$$y = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \text{ atau } 4y = -3x^2 + 6x + 9$$

CONTOH 2.8.4

Tentukan persamaan parabola dan focus jika puncak paraboal di titik asal, yang melalui (-2,4) dan terbuka ke bawah. Gambarkanlah parabola tersebut.

Penyelesaian :

Bentuk persamaan parabola yang terbuka ke bawah dengan puncak di titik asal adalah : $x^2 = -4py$. Oleh karena parabola melalui (2,-4) maka $(2)^2 = -4p(-4)$, Atau p = 4. Jadi persamaan yang dicari adalah $x^2 = -16y$. Grafiknyasebagai berikut :



CONTOH 2.8.5

Grafik dari gerakan Bola yang dilempar lurus ke atas dari permukaan bumi pada waktu t = 0 detik jika diberikan kecepatan awal 24,5 m/det jika gesekan udara diabaikan dapat ditunjukkan bahwa jarak s (dalam meter) dari bola itu ke tanah setelah t detik diberikan oleh persamaan parabola :

$$s = -4{,}9\,t^2 + 24{,}5\,\mathrm{t} \qquad (6.3.7)$$

a) Gambarkan grafik s terhadap t .

b) Berapakah tinggi maksimum bola tersebut.

Penyelesaian :

a) Persamaan (6.3.7) mempunyai bentuk (6.3.3) dengan :

a= -4,9 < 0 jadi parabola terbuka ke bawah , b = 24,5 dan c = 0.

Sumbu simetri : $t = -\dfrac{b}{2a}$ = $-\dfrac{24{,}5}{2\,.(-4{,}9)} = 2{,}5$ det.

Dan akibatnya koordinat-*s* dari puncak parabola adalah :

$$(t,s) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}) = (\,2{,}5; -\frac{24{,}5^2 - 4(-4{,}9)(0)}{4(-4{,}9)})$$

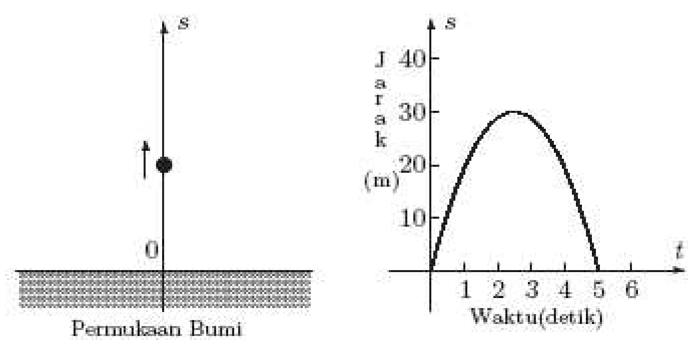
atau $(t,s) = (2{,}5 \;\; ; \;\; 30{,}625)$

Koordinat titik potong dengan sumbu *t* jiak s = 0 :

$0 = -4{,}9\,t^2 + 24{,}5\,\mathrm{t}$ atau $0 = 4{,}9\;\; t\;\;(5-t)$ diperoleh: *t* = 0 atau *t* = 5.

Dari informasi puncak dan perpotongan dengan sumbu koordinat diperoleh grafik parabola Gambar 6.3.6.

b) Oleh karena puncak di $(t,s) = (2{,}5 \;\; ; \;\; 30{,}625)$, maka tinggi maksimum lemparan bola adalah $s \cong 30{,}6$



(Gambar 6.3.6)

Sebuah sifat geometri sederhana dari parabola dijadikan dasar penggunaan dalam ilmu teknik. Menurut prinsip ilmu fisika, cahaya yang datang ke permukaan yang mengkilap, maka sudut datang sama dengan sudut pantul. Sifat parabola dan prinsip fisika ini dipakai untuk membuat lampu sorot dimana sumber cahaya lampu diletakkan pada fokus. Sebaliknya sifat ini digunakan pula dalam teleskop tertentu dimana cahaya masuk yang semua sejajar dan datang dari bintang di fokuskan pada suatu titik yaitu fokus parabola.

CONTOH 2.8.6

Buatlah sketsa grafik dari fungsi

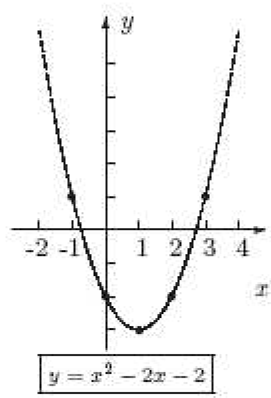
(a). $y = x^2 - 2x - 2$ (b). $y = -x^2 + 4x - 5$

Penyelesaian :

a). Persamaan $y = x^2 - 2x - 2$ merupakan persamaan kuadrat dengan *a* = 1, *b* = -2, dan *c* = -2, sehingga sumbu simetri atau koordinat-*x* dari puncaknya adalah: $x = \frac{-b}{2a} = 1.$

Menggunakan nilai ini dan dua nilai pada tiap sisi (lihat tabel), diperoleh hasil grafik fungsi pada Gambar 6.3.7.

x	$y = x^2 - 2x - 2$
-1	1
0	-2
1	-3
2	-2
3	1

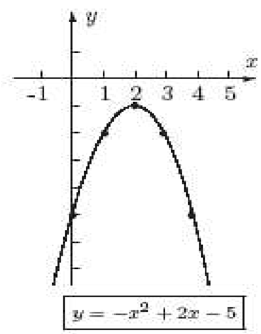


-Gambar 6.3.7

b) Persamaan $y = x^2 + 4x - 5$ merupakan persamaan kuadrat dengan *a* = -1, *b* = 2, dan *c* = -2, sehingga dengan koordinat-*x* dari puncaknya adalah $x = \frac{-b}{2a} = 2$.

Menggunakan nilai ini dan dua nilai pada tiap sisi (lihat tabel), diperoleh hasil grafik fungsi pada Gambar 6.3.8.

x	$y = -x^2 + 4x - 5$
0	-5
1	-2
2	-1
3	-2
4	-5



Gambar 6.3.8 Grafik fungsi $y = x^2 + 4x - 5$

Latihan 6.3

Gambarkan grafik parabola dan tandai koordinat puncak (ekstrim) dan perpotongannya dengan sumbu-sumbu koordinat. Tentukan jenis titik puncak, apakah titik minimum atau maksimum untuk soal nomor 1 sampai dengan 12.

1. $y = x^2 + 2$
2. $y = x^2 - 3$
3. $y = x^2 + 2x - 3$
4. $y = x^2 - 3x - 4$
5. $y = -x^2 + 4x + 5$
6. $y = -x^2 + x$

7. $y = (x-2)^2$
8. $y = (3+x)^2$
9. $x^2 - 2x + y = 0$
10. $x^2 + 8x + 8y = 0$
11. $y = 3x^2 - 2x + 1$
12. $y = x^2 + x + 2$

13. Tentukan nilai *a* jika harus memenuhi syarat yang diharuskan:

    (a). $g(x) = 2x^2 - (a+2)x - 3$, grafik mempunyai sumbu simetri di $x = -1$.

    (b). $h(x) = -x^2 - 3x + 5a - 1$, grafik mempunyai titik balik di $(\frac{-1}{6}, 1)$.

14. Bola yang dilempar lurus ke atas dari permukaan bumi pada waktu $t = 0$ detik jika diberikan kecepatan awal 32 m/det jika gesekan udara diabaikan diberikan oleh persamaan parabola : $s = 32\,t - 16\,t^2$.

    a) Gambarkan grafik *s* terhadap *t* .

    b) Berapakah tinggi maksimum bola tersebut.

2.9 APLIKASI UNTUK EKONOMI

Tiga fungsi yang penting dalam ekonomi adalah :

C(*x*) =Total biaya produksi *x* unit produk selama periode waktu tertentu

R(*x*) =Total hasil penjualan *x* unit produk selama periode waktu tertentu.

P(*x*) = Total keuntungan penjualan *x* unit produk selama periode waktu tertentu.

Fungsi-fungsi itu secara berturut-turut disebut *fungsi biaya*, *fungsi pendapatan* dan *fungsi keuntungan*. Jika semua produk terjual, hubungan fungsi-fungsi itu adalah :

P(*x*) = R(*x*) - C(*x*)

[Keuntungan] = [Pendapatan] – [biaya]

Total biaya C(x) untuk produksi x unit dapat dinyatakan sebagai penjumlahan :

$$C(x) = a + M(x) \qquad (6.4.1)$$

Dengan a konstanta, disebut ***overhead*** dan M(x) adalah ***fungsi biaya pembuatan.*** **O**verhead, merupakan biaya tetap tetapi tidak tergantung pada x, pelaku ekonomi harus membayar tetap jika tidak ada produksi, misalnya biaya sewa dan asuransi. Disisi lain biaya pembuatan M(x) tergantung pada jumlah item pembuatan, contoh biaya material dan buruh. Ini menunjukkan bahwa dalam ilmu ekonomi penyederhanaan asumsi yang tepat M(x) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$M(x) = bx + cx^2$$

Dengan b dan c konstanta. Subtitisi pada (6.4.1) menghasilkan :

$$C(x) = a + bx + cx^2 \qquad (6.4.2)$$

Jika perusahaan perakitan dapat menjual semua item-item produksi denga p rupiah per biji, maka total pendapatan R(x) menjadi

$$R(x) = px$$

Dan total keuntungan :

$$P(x) = [\text{total pendapatan}] - [\text{total biaya}]$$

$$P(x) = R(x) - R(x)$$

$$P(x) = px - C(x)$$

Jadi, jika fungsi biaya diberikan pada (6.4.2), maka

$$P(x) = px - (a + bx + cx^2) \qquad (6.4.3)$$

Tergantung pada faktor-faktor seperti jumlah pekerja, jumlah mesin yang tersedia, kondisi ekonomi dan persaingan, batas atas l pada jumlah item-item yang sanggup diproduksi dan dijual. Jadi selama periode waktu tetap peubah x pada (6.4.3) akan memenuhi :

$$0 \le x \le l$$

Persamaan (6.4.3) merupakan suatu persamaan kuadrat dalam x, yang mana nilai optimum dapat ditentukan , yaitu nilai fungsi pada sumbu simetri. Dengan menentukan nilai-nilai x pada $[0,l]$ yang memaksimumkan (6.4.3) perusahaan dapat menentukan berapa banyak unit produksi harus dibuat dan dijual agar menghasilkan keuntungan terbesar. Masala ini diilustrasikan dalam contoh berikut:

CONTOH 2.9.1

Pinicilin berbentuk cair dibuat oleh suatu perusahaan farmasi dan dijual borongan dengan harga Rp 2 000 per unit. Jika total biaya produksi untuk x unit adalah:

$$C(x) = 5\,000\,000 + 800\,x + 0{,}003\,x^2$$

Dan jika kapasitas produksi terbesar dari perusahaan 300 000 unit dalam waktu tertentu. Berapa banyak unit-unit pinicilin harus dibuat dan dijual agar memperoleh keuntungan maksimum ?

Penyelesaian:

Karena total penghailan untuk penjualan x unit adalah $R(x) = 2\,000\,x$, keuntungan $P(x)$ pada x unit menjadi :

$$P(x) = R(x) + C(x) = 2\,000\,x - (5\,000\,000 + 800\,x + 0{,}003\,x^2)$$

$$P(x) = -0{,}003\,x^2 + 1\,200\,x - 5\,000\,000$$

Dan karena kapasitas produksi terbesar adalah 300 000 unit, berarti x harus terdapat pada selang [0 , 300 000]. Sumbu simetri dari fungsi keuntungan :

$$x = -\frac{1200}{2(-0{,}003)} = 200.000$$

Oleh karena titik $x = 200.000$ berada dalam selang [0 , 300 000] maka keuntungan maksimum harus terjadi pada titik balik/puncak kurva parabola yaitu di $x = 200.000$ dengan koordinat puncak parabola ::

$$(x, P(x)) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$$

$$= (200\ 000\ ; -\frac{(1.200)^2 - 4(-0{,}003)(-5.000.000)}{4(-0{,}003)})$$

$$= (200\ 000\ ; -\frac{(144.10^4 - 6.10^4)}{-12.10^{-3}})$$

$$= (200.000; \frac{138.10^4}{12.10^{-3}})$$

$$= (200.000; 115.10^7)$$

Jadi keuntungan maksimum P(x) = Rp 1,15.10 ^{9} terjadi pada x=200.000 unit diproduksi dan dijual dalam waktu tertentu.

• RANGKUMAN

- Fungsi *f* disebut ***injektif*** jika untuk setiap elemen *y* di daerah nilai, *y* paling banyak mempunyai satu kawan dari *x* di A.

  Fungsi *f* disebut ***surjektif*** jika untuk setiap elemen *y* di B habis dipetakan oleh anggota himpunan di A.

  Fungsi *f* disebut ***bijektif*** jika fungsi itu injektif dan surjektif

- Persamaan garis lurus berbentuk:

  $$y - y_1 = m(x - x_1),$$

  $$y = mx + b,$$

  dengan *m* adalah kemiringan garis.

- Jika $y=f(x)$ dan $y=g(x)$ adalah fungsi dan $f(g(x)) = x$ atau $g(f(x)) = x$ maka ***f* invers dari *g*** atau ***g* invers dari *f***.
- Fungsi kuadrat (parabola) mempunyai bentuk

  $ax^2 + bx + c = 0$

Latihan 6.4

1. Perusahaan Kimia menjual asam sulfur secara borongan dengan harga 100 / unit. Jika total biaya produksi harian dalam ribuan rupiah untuk x unit adalah

   $C(x) = 100.000 + 50\,x + 0{,}0025\,x^2$

   Dan jika kapasitas produksi terbesar dari perusahaan 7 000 unit dalam waktu tertentu.

   a) Berapa banyak unit-unit asam sulfur harus dibuat dan dijual agar memperoleh keuntungan maksimum ?.

   b) Apakah akan menguntungkan perusahaan apabila kapasitas produksi perusahaan ditambah?

2. Perusahaan menentukan bahwa x unit produksi dapat dijual harian pada harga p rupiah per unit, dimana :

   $x = 1000 - p$

   Biaya produksi harian untuk x unit adalah : $C(x) = 3.000 + 20\,x$

   (a) Tentukan fungsi penghasilan $R(x)$.

   (b) Tentukan ungsi keuntungan $P(x)$

(c) Asumsikan bahwa kapasitas produksi paling banyak 500 unit/hari, tentukan berapa banyak unit yang harus diproduksi dan dijual setiap hari agar keuntungan maksimum.

(d) Tentukan keuntungan maksimum.

(e) Berapa garga per unit harus ditentikan untuk memperoleh keuntungan maksimum.

3. Pada proses pembuatan kimia tertentu tiap hari berat y dari kerusakan keluaran kimia yang larut bergantung pada total berat x dari semua keluaran yang didekati dengan rumus :

$$y(x) = 0{,}01\, x + 0{,}00003\, x^2$$

dengan x dan y dalam kg. Jika keuntungan Rp 1 juta per kg dari kimia yang tidak rusak dan rugi Rp 200.000 per kg dari produksi kimia yang rusak, berapa kg seharusnya produk kimia diproduksi tiap hari agar keuntungan maksimum.

c. Suatu perusahaan menyatakan bahwa keuntungan yang diperoleh bergantung pada jumlah pemakaian uang untuk pemasangan iklan, Berdasarkan survey jika perusahaan menggunakan x rupiah untuk iklan maka keuntungan yang diperoleh adalah

$$P(x) = -\frac{x^2}{100} + \frac{x}{50} + 100$$

Tentukan jumlah uang yang harus dipakai untuk pemasangan iklan agar mendapatkan keuntungan sebesar-besarnya.

d. Sebidang lahan ingin dipagari dengan syarat kelilingnya adalah 100 meter. Dengan demikian luas persegi panjang dengan keliling tersebut dapat dinyatakan dalam L (m^2) adalah :

$$L = x(50 - x)$$

a) Tentukan Domain dari fungsi luasan tersebut.

b) Tentukan luas terbesar yang dapat dibuat oleh kawat tersebut.